Αριθμητική Ανάλυση

Εύρεση Ορίζουσας:

$$\det(A) = \det(A^{(1)}) = \det(A^{(2)}) = \det(A_n) = \det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

Εύρεση Αντιστρόφου

$AX = I \Leftrightarrow Ax^{(i)} = e^{(i)},\ i = 1,2,\dots,n$

Έστω ότι έχουμε την LU ανάλυση του A τότε

$$AX = I \Leftrightarrow L\underbrace{UX}_{Y} = I \Leftrightarrow \begin{cases} LY = I \\ UX = Y \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2/3 & 1 & \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Y^T = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ & 4 & 2 & -2/3 & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}\right]$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 2/9 & -1/6 & 0 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 \\ & -1/2 & 1 \end{bmatrix} = X = A^{-1}$$

Άσκηση:

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$10^{-4}x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 = 2$$

Να υπολογιστεί με σύνολο αριθμών μηχανής $M(10,3,-20,20)$

Λύση:

$10^{-4} \quad 1 \quad 1$

$10^{4} \quad 1 \quad 1 \quad 2$

$-10^{4} \quad -10^{4}$

$a_{22}^{(2)} = fl(a_{22}^{(1)} - m_{21} \cdot a_{12}^{(1)}) = fl(1-10^{4}) = fl(-9999) = -10^{4}$

$b_{2}^{(2)} = fl(b_{2}^{(1)} - m_{21} b_{1}^{(1)}) = fl(2-10^{4}) = fl(-9998) = -10^{4}$

$x \approx (0 \quad 1)$

$x_1 = \frac{10000}{9999} = 1.0001 \approx 1, \quad x_2 = \frac{9998}{9999} = 0.9998\ldots \approx 1$

• $1 \quad 1 \quad 2$

$\cdot 10^{-4} \quad 10^{-4} \quad 1 \quad 1$

$1 \quad 1$

$a_{22} = fl(1-10^{-4}) = fl(0.9999) = 1$

$b_{2}^{(2)} = fl(1-2\cdot 10^{-4}) = fl(0.9998) = 1$

$x^T \approx (1 \ldots 1)$

► Αποδεικνύεται ότι μεγάλοι πολλαπλασιαστές πολλαπλασιασμένοι με προηγούμενα σφάλματα επιφέρουν μεγάλα σφάλματα στη λύση

Μέθοδος απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση

Επιλέγουμε το μέγιστο απόλυτο στοιχείο της 1ης στήλης έστω $|a_{k1}| = \max_{1\le j\le n} |a_{j1}|$, τότε αντιμεταθέτουμε την πρώτη με την κ εξίσωση (γραμμή του πίνακα A b)

Εξασφαλίζεται ότι $|m_{i1}| \le 1$ κατά την r απαλοιφή αλλάζουμε την r γραμμή με την l ($l \ge r$) γραμμή όπου $|a_{lr}^{(r)}| = \max_{r\le j\le n} |a_{jr}^{(r)}|$.

Άσκηση:

Να λυθεί το γρ. σύστημα:

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$4x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$$\left|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}1\\4\\4\end{matrix}\right| \rightarrow \begin{matrix}\\ 1/2\\ 1/4\end{matrix}\left[\begin{matrix}4 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}4\\4\\1\end{matrix}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{matrix}4 & 1 & 1\\ & -3/2 & 1/2\\ & 3/4 & 3/4\end{matrix}\right]\left|\begin{matrix}4\\2\\0\end{matrix}\right| \rightarrow \left[\begin{matrix}4 & 1 & 1\\ & -3/2 & 1/2\\ & & 1\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}4\\2\\1\end{matrix}\right]$$

$$x^T = (1 \quad -1 \quad 1)$$

$$\begin{array}{l|llll} & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1/4 & 2 & -1 & 1 & 4\\ 1/2 & \underline{4} & 1 & 1 & 4\\ & & 3/4 & 3/4 & 0\\ & & -3/2 & 1/2 & 2\\ & & & 1 & 1\end{array}$$

$$i = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \rightarrow i = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \rightarrow i = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$x^T = [1 \quad -1 \quad 1]$$

P: μεταθετικός πίνακας σύμφωνα με τη μετάθεση (3 2 1)

$$P = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

PA = LU

$$L = \begin{bmatrix}1 & & \\ 1/2 & 1 & \\ 1/4 & -1/2 & 1\end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ & -3/2 & 1/2\\ & & 1\end{bmatrix}$$

PA = LU

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & 0 & 0\\ 1/2 & 1 & & 0 & 1 & 0\\ 1/4 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array} \qquad \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ & -3/2 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0\\ & & 1 & -1/2 & 1/2 & 1\end{array}$$

$$Y^T = \begin{bmatrix}1 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix}1/3 & 1/6 & -1/2\\ 0 & -1/6 & 1/2\\ -1/3 & 1/3 & 1\end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix}-1/2 & 1/6 & 1/3\\ 1/2 & -1/2 & 0\\ 1/2 & -1/2 & \end{bmatrix}$$

No. 4 Date

$X = (PA)^{-1} = A^{-1} P^{-1} \iff A^{-1} = XP$